CURSUL III

UTILIZAREA INDICATORILOR TENDINTEI CENTRALE PENTRU FUNDAMENTAREA DECIZIILOR

3.1 Introducere

Problematica abordată în acest capitol îl introduce pe cititor în metodologia de calcul al indicatorilor sintetici, cu ajutorul cărora pot fi evidenţiate regularităţile cu caracter de legitate care determină tendinţele esenţiale ale variabilităţii unui fenomen. Primul contact îl avem cu mărimile medii folosite frecvent în analiza statistică; se va observa că, în funcţie de datele de care dispunem, se va alege tipul de medie adecvat şi nu oricare dintre ele; pentru analist este deosebit de important să ştie că, arhicunoscuta medie aritmetică simplă dă erori mari atunci când este folosită în alte condiţii decât cele specifice aplicabilităţii sale.

In acest sens, edificator este următorul exemplu: dacă din 100 de munctori, 90 au obţinut salariul de 600.000 lei/lună şi 10 - salariul de 900.000 lei/lună, potrivit metodologiei de calcul al mediei aritmetice simple, salariul mediu lunar va fi:

$$\bar{s} = \frac{60000 + 900000}{2} = 75000$$

Acest rezultat ar fi corect în cazul în care fiecărui nivel de salarizare i-ar fi corespuns acelaşi număr de muncitori, adică 50. Cum însă situaţia este diferită, calculul corect al salariului mediu este următorul:

$$\bar{s} = \frac{600000 \times 90 + 900000 \times 10}{100} = 63000$$

Diferenţa: 750000 - 630000 = 120000

În cazul în care, pentru stabilirea fondului de salarii necesar efectuării plăţilor în luna viitoare, s-ar fi folosit ca bază de calcul salariul mediu de 750000 lei, s-ar fi ajuns la o supradimensionare a acestui fond, transpusă într-o imobilizare nejustificată.

Dacă structura muncitorilor ar fi fost: 90 de muncitori cu 900.000 lei şi 10-cu 600.000 lei, atunci salariul mediu, corect calculat, ar fi fost:

$$\bar{s} = \frac{600000 \times 10 + 900000 \times 90}{100} = 87000$$

Diferenţa: 750000 - 870000 = - 120000

În acest caz, fondul necesar calculat cu media de 750000, ar fi fost insuficient pentru asigurarea plăţii integrale a salariilor muncitorilor respectivi.

Considerăm că acest exemplu este suficient de relevant pentru a atrage atenţia asupra necesităţii alegerii corecte a tipului de medie, mai ales atunci când acest indicator este folosit, **ca** bază de calcul, în estimaţii.

3.2 Indicatori medii

Noţiune: *Media este expresia sintetică a nivelurilor individuale ale unei variabile oarecare, concretizată într-un singur nivel reprezentativ, care evidenţiază ceea ce este esenţial, firesc, tipic şi obiectiv în dezvoltarea unui fenomen.*

3.2.1 Tipuri de medie- metodologie de calcul

Prin definiţie, media anihilează **toate abaterile** variantelor caracteristicii de la nivelul său.

Tipuri de medie. Se deosebesc:

- Media **aritmetică;**
- Media **armonică;**
- Media **pătratică;**
- Media **geometrică;**
- Media **cronologică.**

Fiecare dintre aceste tipuri are două **variante: simplă** şi **ponderată.**

a) Media aritmetică.

Condiţii de aplicabilitate. În general, media **aritmetică** se foloseşte arunci când variabilitatea unui fenomen se produce aproximativ în progresie aritmetică, adică atunci când nivelurile caracteristicii cresc sau descresc aproximativ cu aceeaşi valoare, înregistrând o tendinţă lineară.

Media aritmetică **simplă,** se foloseşte atunci când numărul variantelor caracteristicii este egal cu numărul unităţilor statistice supuse studiului, adică atunci când **nu se repetă nici o variantă.**

Media aritmetică **ponderată,** se foloseşte atunci când **cel puţin o variantă** se repetă; ea este specifică seriilor de distribuţie.

Metodologie de calcul.

a_1) Media aritmetică simplă.

Funcţia determinantă este de tip **adiţional,** adică nivelul general (total) al caracteristicii X se obţine prin însumarea variantelor x_i. Calculul mediei are la bază următoarea proprietate: substituind, în cadrul funcţiei determinante, valorile x_i cu media lor, nivelul general al caracteristicii X nu trebuie să se schimbe. Deci:

$$x_1+x_2+ \dots\dots\dots +x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\bar{x}+\bar{x}+ \dots\dots\dots + \bar{x} = n\bar{x}$$

$$n\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

în care :

i = numărul nivelurilor caracteristicii X, nerepetabile în cadrul şirului de valori în care se regăsesc;

a_2) Media aritmetică ponderată.

Pentru media aritmetică ponderată, se foloseşte - în principiu - aceeaşi metodologie, cu deosebirea că fiecare variantă este ponderată (înmulţită) cu frecvenţa corespunzătoare. Deci:

$$x_1f_1+x_2f_2+ \dots\dots\dots +x_nf_n = \sum_{j=1}^{m} x_jf_j$$

$$\bar{x} f_1 + \bar{x} f_2 + \ldots + \bar{x} f_n = \bar{x} \sum_{j=1}^{m} f_j$$

$$\bar{x} \sum_{j=1}^{m} f_j = \sum_{j=1}^{m} x_i f_j \Rightarrow \bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{m} x_j f_j}{\sum_{j=1}^{m} f_j}$$

în care:

j = numărul variantelor caracteristicii X, adică al valorilor care se repetă la mai multe unităţi statistice din colectivitatea studiată. Comparând relaţia mediei aritmetice ponderate cu cea a mediei aritmetice simple, se observă că, nivelul mediei aritmetice ponderate este dependent şi de frecvenţele corespunzătoare fiecărei variante.

Proprietăţile mediei aritmetice. Se deosebesc două grupe de proprietăţi:

- de **verificare a exactităţii mediei;**
- de **simplificare a calculului.**

Prima grupă cuprinde:

• *Media valorilor unei caracteristici este mai* ***mare*** *decât varianta* ***minimă*** *şi mai* ***mică*** *decât varianta* ***maximă****,* adică:

$$x_{\min} < \bar{x} < x_{\max}$$

Orice valoare în afara acestui interval, semnalează **nivel eronat** al mediei.

• *Suma abaterilor variantelor caracteristicii de la media lor, este egală cu zero, adică:*

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = 0 \quad \rightarrow \text{pentru media simpla}$$

$$\sum_{j=1}^{m} (x_j - \bar{x}) f_j = 0 \quad \rightarrow \text{pentru media ponderata}$$

Cea de a doua grupă cuprinde:

• *Media calculată din variantele caracteristicii, micşorate în prealabil cu o constantă "a" este mai mică decât media reală cu constanta " a ", ceea ce simbolic este redat de expresia:*

$$\frac{\sum_{j=1}^{m} (x_j - a) f_j}{\sum_{j=1}^{m} f_j} < \bar{x} \quad - cu \text{ "}a\text{"}$$

Din această expresie rezultă că :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{m} (x_j - a) f_j}{\sum_{j=1}^{m} f_j} + a$$

Evident, această relaţie presupune o serie de calcule suplimentare, ineficiente în raport cu relaţia obişnuită.

• *Media calculată din variantele caracteristicii, micşorate în prealabil, prin împărţire la o constantă " k ", este mai mică decât media reală de " k " ori,* adică:

$$\frac{\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{x_j}{k}\right)f_j}{\sum_{j=1}^{m} f_j} < \bar{x} \quad \textit{de "k" ori, de unde rezultă că :}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{x_j}{k}\right)f_j}{\sum_{j=1}^{m} f_j} \times k$$

Această relaţie presupune un calcul mult mai costisitor decât cel obişnuit.

Prin aplicarea concomitentă a celor două proprietăţi, se ajunge la relaţia de calcul simplificat:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{x_j - a}{k}\right)f_j}{\sum_{j=1}^{m} f_j} \times k + a$$

La prima vedere, această relaţie pare destul de complicată; practic însă, **c**u ajutorul său calculul mediei se simplifică într-o măsură considerabilă, întrucât:

» constanta " **a** " este, de regulă, varianta caracteristicii **cu frecvenţa** cea **mai mare;**

» constanta " **k** " este **mărimea intervalului de variaţie;**

» după stabilirea poziţiei lui " **a** " în cadrul seriei de distribuţie, pentru rapoartele (x_j **-** a) / k vor fi trecute automat valorile: **zero** în dreptul poziţiei lui a ; **- 1 , - 2 , - 3 , etc.** deasupra şi **1, 2 , 3 , etc.** sub zero.

Proprietăţile de simplificare a calculului mediei se aplică la seriile de distribuţie cu intervale de variaţie egale. In tabelul 3.1 este prezentat modul de calcul - obişnuit şi simplificat - al mediei aritmetice ponderate.

> prin calculul obişnuit:

$$\bar{x} = \frac{4540}{40} = 113,5$$

➢ prin calculul simplificat:

$$\bar{x} = \frac{(-6)}{40} \times 10 + 115 = 113,5$$

Comparaţia evidenţiază avantajele calculului simplificat.

Tab. 3.1 Calculul mediei aritmetice ponderate.

Intervalul	f_j	x_j	$x_j f_j$	$\frac{x_j - a}{k}$	$\frac{x_j - a}{k} f_j$
---- > 90	1	85	85	-3	- 3
90 - 100	6	95	570	-2	-12
100 - 110	8	105	840	-1	- 8
110 - 120	14	115	1610	0	0
120 - 130	6	125	750	1	6
130 - 140	4	135	540	2	8
140 ---->	1	145	145	3	3
T O T A L:	40	*	4540	*	- 6

b) Media armonică.

Condiţii de aplicabilitate. în general, media **armonică** se foloseşte - ca formă transformată a mediei aritmetice ponderate - atunci când nu se cunosc frecvenţele; este folosită şi ca model matematic în calculul unor indicatori statistici, cum ar fi - spre exemplu - indicele mediu armonic al preţurilor. Media armonică **simplă,** se foloseşte atunci când "$x_j f_j$" sunt **egale,** adică:

$$x_1 f_1 = x_2 f_2 = \ldots\ldots\ x_m f_m$$

Media armonică **ponderată,** se foloseşte atunci când " $x_j f_j$ " sunt **diferite,** adică:

$$x_1 f_1 \neq x_2 f_2 \neq \ldots\ldots \neq x_m f_m$$

Observaţie: Media armonică ponderată se poate folosi şi în cazul în care " $x_j f_j$ " sunt **egale,** dar media armonică simplă se foloseşte **numai** atunci când " $x_j f_j$ " sunt egale.

Metodologie de calcul.

Se deosebesc două tipuri de medie armonică: media armonică rezultată în urma transformării mediei aritmetice ponderate **şi** media armonică propriu-zisă. În cazul mediei armonice **ca formă transformată a mediei aritmetice** ponderate, relaţiile de calcul se obţin prin substituirea frecvenţelor din numitorul relaţiei mediei aritmetice ponderate cu:

$$f_j = \frac{1}{x_j} x_j f_j$$

întrucât x_j şi $x_j f_j$ sunt cunoscute. Dacă " $x_j f_j$ " sunt egale, se obţine relaţia mediei armonice **simple.**

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{m} x_j f_j}{\sum_{j=1}^{m} f_j} = \frac{\sum_{j=1}^{m} x_j f_j}{\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{x_j} x_j f_j} = \frac{n x_j f_j}{x_j f_j \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{x_j}} = \frac{n}{\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{x_j}} = \bar{x}_h$$

Dacă "$x_j f_j$" sunt **diferite,** se obţine relaţia mediei armonice ponderate:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{m} x_j f_j}{\sum_{j=1}^{m} f_j} = \frac{\sum_{j=1}^{m} x_j f_j}{\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{x_j} x_j f_j} = \bar{x}_h$$

Evident, în ambele situaţii, media **aritmetică** ponderată este egală cu media **armonică.** Acest tip de medie armonică se foloseşte, în special, la determinarea preţului mediu de vânzare pe piaţa liberă, atunci când nu se cunosc cantităţile vândute din fiecare marfa (q), dar se cunosc preţurile de vânzare (p) şi valoarea mărfurilor vândute (v = pq).

Media armonică **propriu-zisă,** are - în principiu - aceeaşi metodologie de calcul ca media aritmetică, funcţia determinantă fiind tot de tip adiţional;
deosebirea constă în aceea că, nu se folosesc variantele x_1 ,x_2, x_3, ... ci **inversul** acestor valori, adică $1/x_1$ **,** $1/x_2$,$1/x_3$, ...

Astfel:

b1) Media armonică simplă

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+........+\frac{1}{x_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$$

$$\frac{1}{\overline{x}_h}+\frac{1}{\overline{x}_h}+........+\frac{1}{\overline{x}_h}=\frac{n}{\overline{x}_h}$$

$$\frac{n}{\overline{x}_h}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} \quad \Rightarrow \quad \overline{x}_h=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$$

b 2) Media armonică ponderată

$$\frac{1}{x_1}f_1+\frac{1}{x_2}f_2+........+\frac{1}{x_m}f_m=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{x_j}f_j$$

$$\frac{1}{\overline{x}_h}f_1+\frac{1}{\overline{x}_h}f_2+........+\frac{1}{\overline{x}_h}f_m=\frac{1}{\overline{x}_h}\sum_{j=1}^{m}f_j$$

$$\frac{1}{\overline{x}_h}\sum_{j=1}^{m}f_j=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{x_j}f_j \quad \Rightarrow \quad \overline{x}_h=\frac{\sum_{j=1}^{m}f_j}{\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{x_j}f_j}$$

Este foarte rar folosită în practică. Serveşte însă ca model matematic în calculul unor indicatori statistici de largă circulaţie cum sunt indicii de grup ai dinamicii preţurilor de vânzare aferente mărfurilor şi serviciilor de pe piaţa liberă.

După cum se observă, metodologia de calcul este similară cu cea prezentată la calculul mediei aritmetice ponderate, folosindu-se în calculul său inversul variantelor caracteristicii.

Făcând o comparaţie între relaţia mediei armonice ponderate **propriu-zise** şi relaţia mediei armonice ponderate - **formă** transformată a mediei aritmetice ponderate - se observă că relaţiile respective sunt diferite.

Dacă, pentru aceleaşi date se folosesc atât media aritmetică cât şi media armonică **propriu-zisă,** întotdeauna:

$$\overline{x}_h < \overline{x}$$

c) Media pătratică.

Condiţii de aplicabilitate. Media **pătratică** se foloseşte, de regulă, în cazul în care fenomenele înregistrează creşteri aproximativ în progresie exponenţială, adică atunci când creşterea este mai lentă la începutul seriei şi din ce în ce mai pronunţată spre sfârşitul acesteia; este folosită deci, în analiza tendinţelor nelineare, de tip exponential.

Este utilizată şi ca model matematic în calculul unuia dintre indicatorii sintetici ai variaţiei şi anume, abaterea standard.

Metodologie de calcul

Metodologia de calcul este similară cu cea de la media aritmetică, funcţia determinantă fiind tot de tip adiţional; deosebirea constă în aceea că, în cazul mediei pătratice, se foloseşte pătratul variantelor caracteristicii. Astfel:

c_1) Media pătratică simplă.

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots\dots + x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\bar{x}_p^2 + \bar{x}_p^2 + \dots\dots + \bar{x}_p^2 = n\bar{x}_p^2$$

$$n\bar{x}_p^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$$

c_2) Media pătratică ponderată

$$x_1^2 f_1 + x_2^2 f_2 + \dots\dots + x_m^2 f_m = \sum_{j=1}^{m} x_j^2 f_j$$

$$\bar{x}_p^2 f_1 + \bar{x}_p^2 f_2 + \dots\dots + \bar{x}_p^2 f_m = \bar{x}_p^2 \sum_{j=1}^{m} f_j$$

$$\bar{x}_p^2 \sum_{j=1}^{m} f_j = \sum_{j=1}^{m} x_j^2 f_j \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_p = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{m} x_i^2 f_j}{\sum_{j=1}^{m} f_j}}$$

Dacă pentru aceeaşi serie se calculează media aritmetică şi media pătratică, întotdeauna:

$$\bar{x} < \bar{x}_p$$

Această proprietate este determinată de faptul că, în cazul mediei pătratice variantele caracteristicii, prin ridicare la pătrat, participă la calculul mediei în mod diferenţiat, pătratul lor îndeplinind rolul de frecvenţă. Exemplu:

$x_1 = 20$; $x_2 = 40$; $x_3 = 80$ **....**

In cazul mediei aritmetice, fiecare variantă intră în calculul mediei o singură dată; la media pătratică, x_1 intră în calcul de 20 de ori, x_2 - de 40 de ori, x_3 - de 80 de ori ....

Din acest motiv, media pătratică este indicată pentru analiza fenomenelor care înregistrează tendinţe de tip exponenţial.

d) Media geometrică.

Condiţii de aplicabilitate. Media **geometrică** se foloseşte în cazurile în care fenomenele înregistrează modificări, aproximativ, în progresie geometrică; este utilizată mai frecvent în cazul în care diferenţele **dintre variantele** caracteristicii sunt mai **mari** Ia începutul seriei şi din ce în ce mai **mici** către sfârşitul acesteia. Rezultă că, media geometrică este recomandată pentru analiza tendinţelor nelineare care evidenţiază creşteri mari la început şi o atenuare a acestora spre sfârşitul seriei.

Este folosită şi ca model matematic în calculul unuia dintre indicatorii sintetici ai seriilor cronologice şi anume, *indicele mediu al dinamicii*.

Metodologie de calcul.

In cazul mediei **geometrice,** funcţia determinantă este de tipul **produsului.**

d1) Media geometrică simplă.

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots\ldots \cdot x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

$$\overline{x}_g \cdot \overline{x}_g \cdot \ldots\ldots \cdot \overline{x}_g = \overline{x}_g^n$$

$$\overline{x}_g^n = \prod_{i=1}^{n} x_i \quad \Rightarrow \quad \overline{x}_g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

d2) Media geometrică ponderată.

$$x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdot \ldots\ldots \cdot x_m^{f_m} = \prod_{j=1}^{m} x_j^{f_j}$$

$$\overline{x}_g^{f_1} \cdot \overline{x}_g^{f_2} \cdot \ldots\ldots \cdot \overline{x}_g^{f_m} = \overline{x}_g^{\sum_{j=1}^{m} f_j}$$

$$\overline{x}_g^{\sum_{j=1}^{m} f_j} = \prod_{j=1}^{m} x_j^{f_j} \quad \Rightarrow \quad \overline{x}_g = \sqrt[\sum_{j=1}^{m} f_j]{\prod_{j=1}^{m} x_j^{f_j}}$$

Ambele variante ale mediei geometrice se rezolvă prin logaritmare; evident, se apelează la acest mod de calcul atunci când nu dispunem de un calculator cu facilităţi corespunzătoare calculului direct.

Pentru media geometrică simplă:

$$Log_{10}(\overline{x}_g) = \frac{\sum_{i=1}^{n} Log_{10}(x_i)}{n} \quad \Rightarrow \quad \overline{x}_g = NLog_{10}(\overline{x}_g)$$

Pentru media geometrică ponderată:

$$Log_{10}(\overline{x}_g) = \frac{\sum_{j=1}^{m} f_j Log_{10}(x_j)}{\sum_{j=1}^{m} f_j} \quad \Rightarrow \quad \overline{x}_g = NLog_{10}(\overline{x}_g)$$

în care N semnifică " nonlogaritmul " mediei geometrice sau numărul corespunzător logaritmului acestei medii.

Dacă pentru aceleaşi date se calculează media aritmetică, pătratică şi geometrică, întotdeauna:

$$\overline{x}_g < \overline{x} < \overline{x}_p$$

Din acest motiv, media geometrică este recomandată pentru analiza seriilor în cadrul cărora se manifestă tendinţe de încetinire a ritmului de creştere.

e) Media cronologică.

Condiţii de aplicabilitate. Media cronologică se foloseşte - în exclusivitate - pentru seriile **cronologice de momente.**

Media cronologică **simplă**, este utilizată în cazul în care intervalele dintre momente sunt egale, adică:

$$t_1 = t_2 = ... = t_m$$

unde m = numărul de intervale dintre momentele seriei.

Media cronologică **ponderată**, se foloseşte atunci când intervalele dintre momente sunt **diferite**, adică:

$$t_1 \neq t_2 \neq .... \neq t_m$$

Metodologie de calcul.

In principiu, media cronologică este o medie aritmetică. In calculul său se deosebesc două etape:

» **calculul mediilor mobile.** Mediile mobile sunt medii aritmetice simple calculate din câte doi, trei, ... termeni ai seriei, în cadrul cărora unul, doi sau mai mulţi termeni se repetă;

» **calculul mediei cronologice.** Media cronologică - simplă sau ponderată - este o medie aritmetică - simplă sau ponderată - a **mediilor mobile.**

e_1) Media cronologică simplă.

Considerăm următoarea serie:

Data	x_i
1.01	x_1
1.02	x_2
1.03	x_3
1.04	x_4
1.05	x_5
:	:

> **Calculul mediilor mobile.** Se vor lua în calcul câte doi termeni. Astfel:

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}; \bar{x}_2 = \frac{x_2 + x_3}{2}; \bar{x}_3 = \frac{x_3 + x_4}{2} ....$$

> **Calculul mediei cronologice simple** - ca **o medie aritmetică simplă** a **mediilor mobile.**

$$\bar{x}_c = \frac{\sum_{m=1}^{n-1} \bar{x}_m}{m}$$

unde m = numărul mediilor mobile sau numărul intervalelor dintre momente; m =n-1 (n reprezintă numărul termenilor seriei).

In practică se foloseşte mai frecvent o relaţie, derivată din relaţia de bază, în cadrul căreia se preiau direct variantele x_i, fără a se mai trece prin cele două etape de calcul; la această relaţie se ajunge pornind de la relaţia de bază în care mediile mobile se înlocuiesc cu formulele lor de calcul. Astfel:

$$\bar{x}_c = \frac{\sum_{m=1}^{n-1} \bar{x}_m}{m} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + ... + \bar{x}_m}{m} = \frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_2 + x_3}{2} + ... + \frac{x_{n-1} + x_n}{2}}{m} =$$

$$= \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + ... + \frac{x_n}{2}}{m}$$

e_2) Media cronologică ponderată.

Se consideră seria:

Data	x_i
1.01	x_1
1.03	x_2
1.06	x_3
1.08	x_4
1.11	x_5

•**Calculul mediilor mobile.**

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} ; \bar{x}_2 = \frac{x_2 + x_3}{2} ; \ldots\ldots$$

calcul similar cu cel de la media cronologică simplă (e_1)

•**Calculul mediei cronologice ponderate** - ca o medie aritmetică ponderată a mediilor mobile, folosindu-se ca ponderi (frecvenţe) intervalele dintre momente. Deci:

$$\bar{x}_c = \frac{\sum_{m=1}^{n-1} \bar{x}_m t_m}{\sum_{m=1}^{n-1} t_m}$$

In practică, se foloseşte o variantă a mediei cronologice ponderate, obţinută din relaţia de bază prin înlocuirea mediilor mobile cu relaţiile lor de calcul. Astfel:

$$\bar{x}_c = \frac{\bar{x}_1 t_1 + \bar{x}_2 t_2 + \ldots\ldots + \bar{x}_m t_m}{t_1 + t_2 + \ldots\ldots + t_m} = \frac{\frac{x_1 + x_2}{2} t_1 + \frac{x_2 + x_3}{2} t_2 + \ldots\ldots + \frac{x_{n-1} + x_n}{2} t_m}{t_1 + t_2 + \ldots\ldots + t_m} =$$

$$= \frac{x_1 \frac{t_1}{2} + x_2 \frac{t_1 + t_2}{2} + x_3 \frac{t_2 + t_3}{2} + \ldots\ldots + x_n \frac{t_m}{2}}{t_1 + t_2 + \ldots\ldots + t_m}$$

Pentru evitarea erorilor de calcul şi de interpretare a mărimilor medii, este absolut necesar să se aleagă corect tipul de medie adecvat datelor supuse analizei.

3.3 Indicatori de poziţie

3.3.1 Mediana - noţiune, metodologie de calcul, utilitate.

Noţiune: *Mediana este acea valoare a caracteristicii care împarte seria în două părţi egale.*

Metodologie de calcul.

Pentru seriile simple, se deosebesc două cazuri:

a) Când seria are un număr **impar** de termeni - mediana este varianta caracteristicii care ocupă locul (n+1)/2 în cadrul seriei ordonate crescător sau descrescător. Exemplu, fie seria:

1 5 , 2 7 , 10 , 3 8 , 2 3 , 3 1 , 1 8

Ordonăm seria :

1 0 , 1 5 , 1 8 , 2 3 , 2 7 , 3 1 , 3 8 Mediana este 23, ocupând locul (7+1) / 2.

b) Când seria are un număr **par** de termeni - mediana este dată de media aritmetică simplă a termenilor centrali din seria ordonată crescător sau descrescător.

Exemplu, dacă din seria precedentă se elimină ultimul termen, atunci mediana = (18+23) /2 = 20,5.

Pentru seriile de **distribuţie,** se deosebesc două posibilităţi de calcul:

a) Calcul **algebric,** în care caz se foloseşte relaţia:

$$Me = L_{\inf} + \left(\frac{\sum_{j=1}^{m} f_j}{2} - S_f \right) \frac{k}{f_{Me}}$$

în care;

L_{inf}= limita inferioară a intervalului în care se plasează mediana;

$\frac{\sum f}{2}$ = jumătate din numărul de unităţi statistice, conform definiţiei medianei;

Sf = suma frecvenţelor intervalelor care **preced** intervalul în care se plasează mediana;

k = mărimea intervalului de variaţie;

f_{Me} = frecvenţa intervalului în care se plasează mediana.

Această relaţie are la bază ipoteza că, în interiorul intervalului de variaţie unităţile statistice sunt **uniform** distribuite.

b) Calcul **grafic,** în care caz se foloseşte curba frecventelor cumulate (ogiva).

Astfel: de pe ordonată, din dreptul lui $\frac{\sum f}{2}$, se duce o paralelă la abscisă şi din intersecţia acesteia cu ogiva, se coboară o perpendiculară pe abscisă; punctul de întâlnire a perpendicularei cu abscisa corespunde - cu o precizie de 100 % - valorii medianei.

Un model este prezentat în figura 3.1.

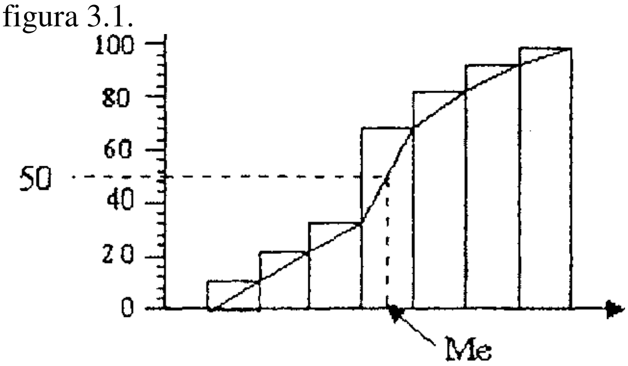

Fig. 3.1 Calculul grafic al medianei.

Utilitate. Mediana are, în principal, următoarele utilizări:

* poate fi folosită în locul mediei, în aprecierea nivelului mediu al unor serii statistice;
* este folosită, ca bază de calcul, în determinarea unor indicatori ai asimetriei;
* este folosită, ca etalon, în aprecierea gradului de semnificaţie a mediei, prin diferenţa dintre aceşti indicatori; cu cât diferenţa este mai mică, cu atât semnificaţia mediei este mai apropiată de cea a medianei.

3.3.2 Dominanta - noţiune, metodologie de calcul, utilitate.

Noţiune: *Dominanta este acea valoare a caracteristicii care are frecvenţa cea* ***mai mare.***

Dominanta este cunoscută şi sub numele de "**Mod**", de la cuvântul englezesc "Mode", care - în contextul respectiv - are înţelesul de " **indicator la modă, indicator larg**

răspândit". Considerăm că, pentru noi este mai uzuală denumirea de " **Dominantă** ", folosită în statistica franceză, denumire care este mai aproape de conţinutul acestui indicator.

Metodologie de calcul.

Din definiţie rezultă că dominanta este un indicator specific seriilor de distribuţie. Se deosebesc două posibilităţi de calcul:

a) Calcul **algebric** - caz în care se foloseşte relaţia:

$$Do = L_{\inf} + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} k$$

în care : L_{inf} = limita inferioară a intervalului în care se plasează dominanta;
k = mărimea intervalului de variaţie;
Δ_1 = frecvenţa maximă minus frecvenţa precedentă ;
Δ_2 = frecvenţa maximă minus frecvenţa următoare.

Se observă că şi în cazul dominantei, relaţia este aplicabilă seriilor de distribuţie unidimensionale cu intervale egale.

b) Calcul **grafic** - caz în care se foloseşte **histograma prin dreptunghiuri.** Se unesc vârfurile coloanei maxime cu punctele de incidenţă ale acesteia cu coloanele adiacente şi din intersecţia segmentelor respective, se coboară o perpendiculară pe abscisă; valoarea corespunzătoare punctului de intersecţie al acestei perpendiculare cu abscisa, reprezintă - cu o precizie de 100 % - nivelul dominantei.

Un model este prezentat în figura 3.2 .

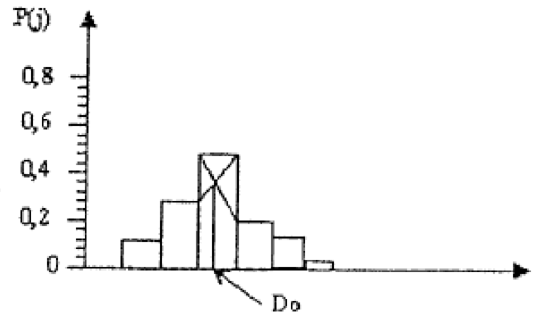

Fig. 3.2 Calculul grafic al dominantei.

Utilitate. Dominanta are aceleaşi utilizări ca şi mediana; este folosită mai mult decât mediana în calculul unor indicatori ai asimetriei.

Media, mediana şi dominanta constituie **sistemul indicatorilor tendinţei centrale.** Ei se plasează, de regulă, în zona centrală a distribuţiilor unidimensionale moderat asimetrice, fapt ce le conferă un grad ridicat de semnificaţie, de reprezentativitate, având o importanţă deosebită în practica de analiză statistică.

Mediana şi dominanta sunt **cunoscute ca făcând parte din** grupa **indicatorilor de poziţie.**

Şi în cazul seriilor cronologice, cu câteva excepţii, locul preferat al acestor indicatori este tot zona centrală (evident, este vorba de medie şi mediană).

3.4 Concluzii

Asupra utilităţii şi importanţei mărimilor medii în.analiza statistică a fenomenelor social-economice, ar fi de prisos orice argumentaţie.

Dată fiind semnificaţia deosebită a acestor indicatori sintetici, este absolut necesară alegerea şi interpretarea corectă a mediilor utilizate. Pentru a se fixa bine problematica de ordin aplicativ referitoare la aceşti indicatori, reluăm în sinteză condiţiile aplicabilităţii fiecărui tip de medie.

- **Media aritmetică**. Se foloseşte :

» când fenomenul înregistrează modificări în progresie aritmetică ;

» când diferenţele dintre variantele x_i sunt aproximativ constante;

» când tendinţa evolutivă a fenomenului studiat este lineară.

Media aritmetică simplă se foloseşte atunci când numărul variantelor x_i este egal cu numărul unităţilor statistice.

Media aritmetică ponderată este specifică seriilor de distribuţie.

- **Media armonică.**

Ca formă transformată a mediei aritmetice ponderate, se foloseşte atunci când nu se cunosc frecvenţele f_i.

Media armonică simplă se foloseşte numai atunci când $x_i f_i$ sunt egale.

Media armonică ponderată se foloseşte în cazul în care $x_i f_i$ sunt diferite, dar şi în cazul în care $x_i f_i$ sunt egale; în cel de al doilea caz, se ajunge la media armonică simplă.

Notă: Aceste condiţii se referă la media armonică - formă transformată a mediei aritmetice ponderate şi nu la media armonică propiu-zisă.

- **Media pătratică** . Se foloseşte:

» când diferenţele dintre variantele x_i sunt mici la începutul seriei şi din ce în ce mai mari către sfârşitul acesteia;

» când variantele x_i înregistrează creşteri în progresie exponenţială;

» când tendinţa fenomenului studiat este nelineară, de tip exponenţial.

Media pătratică simplă, se foloseşte atunci când numărul variantelor x_i este egal cu numărul unităţilor statistice dintr-o colectivitate dată, sau atunci când numărul variantelor x_i este egal cu numărul termenilor seriei; cel de al doilea caz, se referă - în mod deosebit - la seriile cronologice de intervale de timp, care evidenţiază o tendinţă de tip exponenţial.

Media pătratică ponderată este specifică seriilor de distribuţie, fiind folosită mai rar ca aplicaţie directă; este întâlnită mai frecvent ca model matematic în calculul abaterii standard - unul dintre indicatorii importanţi ai variaţiei.

- **Media geometrică** . Se foloseşte:

» când diferenţele dintre variantele x_i sunt mari la începutul seriei şi din ce în ce mai mici către sfârşitul acesteia;

» când variantele x_i înregistrează modificări în progresie geometrică, mai ales atunci când este vorba de o micşorare treptată a diferenţelor dintre aceste valori;

» când tendinţa evolutivă a fenomenului studiat este nelineară, de tip geometric şi mai ales regresiv.

Media geometrică simplă se foloseşte atunci când numărul variantelor x_i =este egal cu numărul unităţilor statistice dintr-o colectivitate dată, sau atunci când numărul acestor variante este egal cu numărul termenilor seriei; şi aici este vorba de seriile cronologice de intervale de timp, a căror tendinţă evolutivă evidenţiază o regresie geometrică.

Media geometrică ponderată este specifică seriilor de distribuţie, fiind foarte rar întâlnită ca aplicaţie directă.

In statistică, ambele tipuri de medie geometrică se folosesc mai frecvent ca model matematic în calculul indicelui mediu al dinamicii - un indicator foarte util pentru analiza seriilor cronologice.

- **Media cronologică:**

Este folosită numai pentru analiza seriilor cronologice de momente. Media cronologică simplă se aplică atunci când intervalele $t_k$dintre momentele seriei sunt egale.

Media cronologică ponderată se foloseşte atunci când intervalele t_k dintre momente nu sunt egale.

Pentru un statistician, importante sunt şi următoarele constatări:

> în cazul în care, pentru o distribuţie unidimensională, media, mediana şi dominanta sunt egale, seria respectivă este simetrică dacă este îndeplinită şi condiţia repartizării frecvenţelor, două câte două egale de o parte şi de alta a frecvenţei maxime;

> pentru o serie simetrică, gradul de reprezentativitate, de semnificaţie a mediei este egal cu cel al medianei şi respectiv al dominantei;

> dacă media este mai mică sau mai mare decât mediana, atunci mediana se va plasa între nivelul mediei şi cel al dominantei.

> dacă pentru două, trei sau mai multe distribuţii simetrice, mediile sunt egale, asta nu înseamnă că - în mod obligatoriu - aceste medii au şi acelaşi grad de semnificaţie;

Aria informaţională oferită de indicatorii tendinţei centrale, va fi completată pe parcursul prezentării celorlalte seturi de indicatori sintetici folosiţi în analiza statistică, indicatori cu a căror metodologie de calcul, semnificaţie şi utilitate vom face cunoştinţă în capitolele următoare.